# PRINCIPI IZGRADNJE FAZNIH I FREKVENCIJSKIH MODULATORA

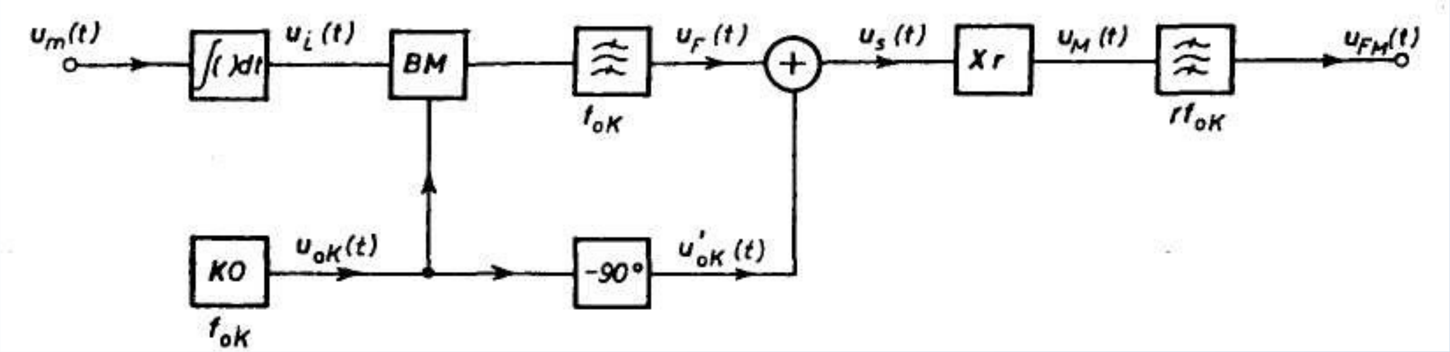
Metode generisanja FM signala mogu da se klasifikuju u dvije grupe:

1. indirektne – postupci kojima se FM signali dobijaju pomoću integratora i ΦM modulatora

2. direktne – nekim direktnim postupkom se obezbjeđuje da trenutna devijacija učestanosti bude direktno srazmjerna modulišućem signalu.

# 1. INDIREKTNI METODI GENERISANJA FM SIGNALA
# - Armstrongov modulator

Blok šema Armstrongovog modulatora prikazana je na slici:




*Slika: Blok-šema Armstrongovog modulatora*

KO je kvarcni oscilator fiksne učestanosti $f_{0K}$. Napon na njegovom izlazu je:

$$u_{0K}(t) = U_{0K} \cos \omega_{0K} t$$

BM je balansni modulator. Neka je modulišući signal oblika:

$$u_m(t) = U_{m1} \cos \omega_m t$$

Kako modulišući signal napaja integrator, na njegovom izlazu (ulazu u BM) je:

$$u_i(t) \cong \frac{1}{RC}\int U_{m1}\cos\omega_m t\cdot dt = \frac{U_m}{\omega_m}\sin\omega_m t$$

Na izlazu balansnog modulatora, filtrom propusnikom opsega učestanosti izdvaja se signal:

$$u_F(t) = k_U u_i(t)\cdot u_{0K}(t) = k_U\frac{U_m U_{0K}}{\omega_m}\sin\omega_m t\cdot\cos\omega_{0K} t$$

Napon iz KO istovremeno napaja sklop koji unosi fazni pomeraj od -90°, pa se na njegovom izlazu dobija:

$$u'_{0K}(t) = U_{0K}\cos\left(\omega_{0K} t - \frac{\pi}{2}\right) = U_{0K}\sin\omega_{0K} t$$

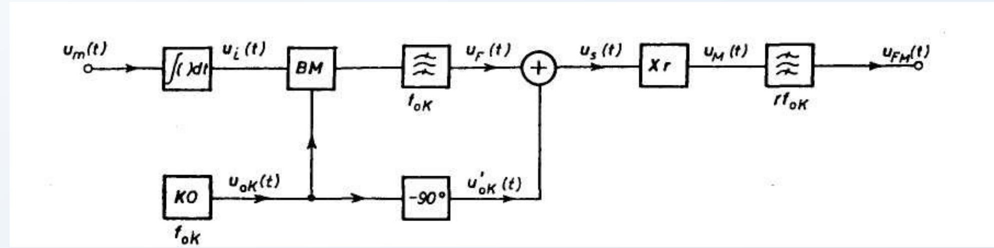
Na izlazu iz kola za sumiranje dobija se napon:

$$u_S(t) = u'_{0K}(t) + u_F(t) = U_{0K}\sin\omega_{0K} t + k_U\frac{U_m U_{0K}}{\omega_m}\sin\omega_m t\cdot\cos\omega_{0K} t$$

Ovaj izraz može da se napiše u obliku:

$$u_S(t) = U_{0K}\left(\sin\omega_{0K} t + \frac{k_U U_m}{\omega_m}\sin\omega_m t\cdot\cos\omega_{0K} t\right) = U_{0K}\sqrt{1+\left(\frac{k_U U_m}{\omega_m}\right)^2\sin^2\omega_m t}\ \sin(\omega_{0K} t+\varphi)$$

Uz: $\tan\varphi = \frac{k_U U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t$




i pretpostavku da je: $\frac{k_U U_m}{\omega_m} \ll 1$

Može se smatrati:

$$\tan\varphi \cong \varphi \qquad \text{i} \qquad \left(\frac{k_U U_m}{\omega_m}\right)^2 \to 0$$

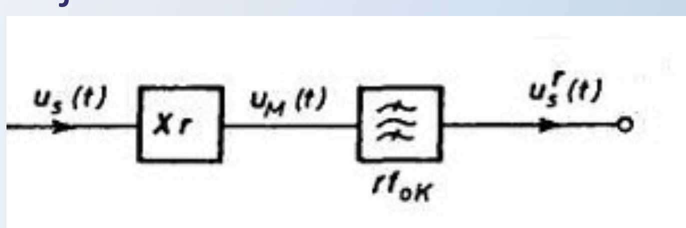
pa je:

$$u_S(t) \cong U_{0K} \sin\left(\omega_{0K} t + \frac{k_U U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t\right)$$

$$u_S(t) = U_{0K} \sin\left(\omega_{0K} t + k_U \int U_m \cos \omega_m t \, dt\right)$$

Ovaj izraz predstavlja frekvencijski modulisan signal. Pretpostavljeni sklop vrši funkciju FM modulatora samo ako je indeks modulacije mali (m<<1). Maksimalni indeks modulacije u ovom slučaju iznosi 0,2 (signal ima nosilac i 2 bočne komponente).

Da bi se povećala devijacija učestanosti, dobijeni signal se dovodi na umnožavač učestanosti (X r) i odgovarajući filtar.



Umnožavač je nelinearan sklop čija je karakteristika „izlaz — ulaz”:

$$u_M(t) = a_0 + a_1 u_S(t) + a_2 u_S^2(t) + \cdots + a_r u_S^r(t) + \cdots$$

Izlaznim filtrom propusnikom opsega učestanosti čija je centralna učestanost $rf_{0K}$, $r$ je cio broj, se izdvaja r-ti harmonik signala $u_s(t)$, pa je:

$$u_{FM}(t) = U_0 \sin\left(r\,\omega_{0K} t + \frac{rk_U U_m}{\omega_m} \sin\omega_m t\right) = U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega_0}{\omega_m} \sin\omega_m t\right)$$

Dobili smo FM signal čija je učestanost nosioca:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{r\,\omega_{0K}}{2\pi} = rf_{0K}$$

a devijacija učestanosti:

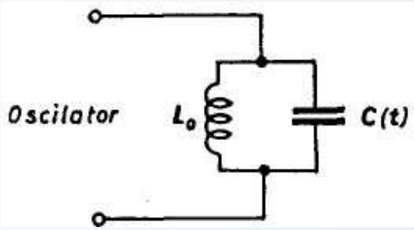
$$\Delta f_0 = \frac{1}{2\pi}\Delta\omega_0 = \frac{1}{2\pi} rk_U U_m = \frac{1}{2\pi} r\Delta\omega_{0K} = r\,\Delta f_{0K}$$

Na ovaj način smo povećali maksimalnu devijaciju učestanosti i indeks modulacije *r* puta.

# 2. DIREKTNI METODI GENERISANJA FM SIGNALA

Direktan metod generisanja FM signala podrazumijeva da se učestanost oscilatora direktno mijenja pod uticajem modulišućeg signala. Ovaj princip se po pravilu ostvaruje tako što se neki od parametara oscilatora od koga zavisi učestanost oscilacija $\omega_0$ mijenja u zavisnosti od modulišućeg signala. Najčešće su to kapacitivnost kondenzatora i induktivnost kalema.
Dobra strana ovih modulatora je u tome što se ***direktno*** postiže dovoljno velika devijacija učestanosti, pa nije potreban veliki broj stepeni umnožavača.

- Generisanje FM signala promjenom C ili L u rezonantnom oscilatornom kolu




Rezonantna učestanost oscilatora je:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Neka je u tom kolu induktivnost $L_0$=const, a neka se kapacitivnost kondenzatora mijenja ($C=C(t)$).

$$C = C(t) = C_0 + \delta C(t)$$

Trenutna učestanost generisanih oscilacija će biti:

$$\omega_i^2 = \omega^2(t) = \frac{1}{L_0 C(t)}$$

Uvrštavajući izraz za promjenjivu kapacitivnost, trenutna učestanost je:

$$\omega_i^2 = \omega^2(t) = \frac{1}{L_0 [C_0 + \delta C(t)]} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{1}{1 + \frac{\delta C(t)}{C_0}}$$

$$\omega_i = \omega(t) = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta C(t)}{C_0}}}$$

Pretpostavimo da su promjene kapacitivnosti male:

$$\delta C(t) \ll C_0$$

Tada će za trenutnu učestanost važiti približno:

$$\omega_i = \omega(t) \cong \omega_0 \left[ 1 - \frac{\delta C(t)}{2 C_0} \right]$$

$$\omega_i = \omega(t) = \omega_0 + \delta\omega_i$$

Trenutna devijacija učestanosti je:

$$\frac{\delta\omega_i}{\omega_0} \cong -\frac{\delta C(t)}{2C_0}$$

Znak - znači da povećanju kapacitivnosti δC(t) odgovara smanjenje učestanosti. Pretpostavimo da su promjene kapacitivnosti direktno srazmjerne modulišućem signalu $u_m(t)$:

$$\delta C(t) = k_C u_m(t) = k_C U_m m(t) = \Delta C_0 m(t)$$

$$\Delta C_0 = |\delta C(t)|_{max} = k_C U_m |m(t)|_{max} = k_C U_m$$

Trenutna devijacija učestanosti će biti:

$$\delta\omega_i \cong -\frac{1}{2}\omega_0 \frac{\Delta C_0}{C_0} m(t) = -\Delta\omega_0 m(t)$$

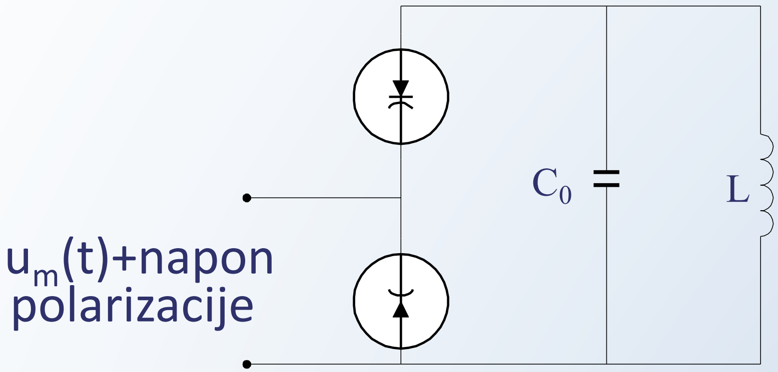
tj. učestanost izlaznog signala:

$$\omega_i = \omega(t) = \omega_0 - \Delta\omega_0 m(t)$$

Pri navedenim uslovima moguće je ostvariti da se trenutna učestanost oscilatora mijenja direktno srazmjerno modulišućem signalu.

- Jedna mogućnost promjene kapacitivnosti je pločasti kondenzator čije se rastojanje između ploča, ili njihova površina mijenja u skladu sa modulišućim signalom.

- Druga mogućnost je upotreba varikap dioda koja je negativno polarisana, a kapacitivnost zavisi od napona polarizacije.




$$\delta C(t) << C_0$$

FM signale generalno možemo podijeliti na:
1. Uskopojasne – indeks modulacije je m<0.2
2. Širokopojasne – indeks modulacije je m>0.2

Oba navedena tipa modulatora su uskopojasna.

# DETEKCIJA UGAONO MODULISANIH SIGNALA

U prijemniku se mora obaviti operacija inverzna modulaciji: iz ugaono modulisanog signala potrebno je izvući originalan signal koji predstavlja poslatu poruku. Ova operacija naziva se ***detekcija*** ugaono modulisanih signala.

Pošto između frekvencijske i fazne modulacije postoji opšta veza, ono što važi za detekciju FM signala može da se primijeni i za ΦM signale:

ΦD = FD + integrator

Detekcija FM signala obavlja se u sklopu koji se naziva ***diskriminator***. To je sklop čiji izlazni napon linearno zavisi od trenutne učestanosti ulaznog signala, pod uslovom da je amplituda ulaznog FM signala konstantna. Zbog navedenog uslova, ispred diskriminatora se postavlja ***limiter***. To je sklop koji odstranjuje promjene amplituda, i na taj način obezbjeđuje korektan rad diskriminatora.

Proces detekcije FM signala se obavlja u dvije faze:

1. Konverzija frekvencijski modulisanog signala u KAM signal.
2. Demodulacija KAM signala pomoću detektora anvelope.

Pretpostavimo da imamo FM signal:

$$u(t) = U_0 \cos\left[\omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t)\, dt\right]$$

Na izlazu iz diskriminatora se dobija:

$$\omega_i = \omega_0 + \Delta\omega_0 \cdot m(t) = \omega_0 + k_\omega u_m(t)$$

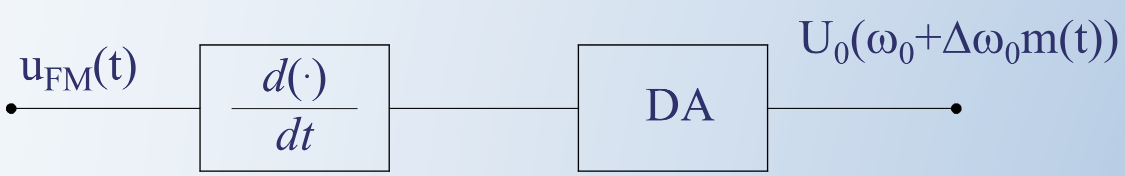
Diferenciranjem FM signala dobija se:

$$\frac{du(t)}{dt} = -U_0(\omega_0 + \Delta\omega_0 m(t))\sin(\omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t)dt)$$

Signal poruke je sadržan i u amplitudi i u fazi, pa je riječ o hibridno modulisanom signalu. Ako dobijeni signal propustimo kroz detektor anvelope, dobija se:

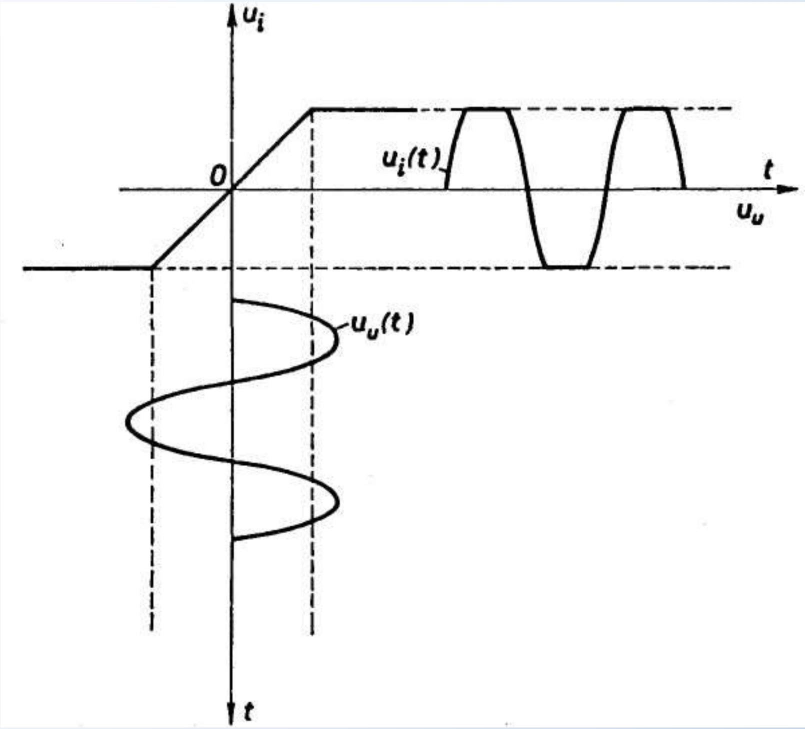
$$u_i(t) = U_0(\omega_0 + \Delta\omega_0 m(t))$$

Blok šema diskriminatora je:



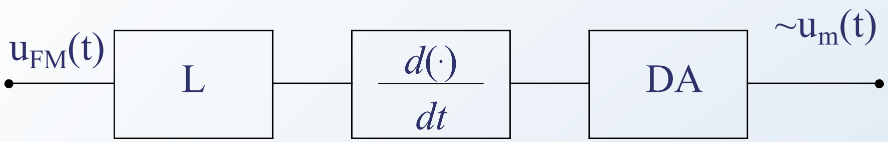
Uslov da detekcija bude realizovana na kvalitetan način je da amplituda ulaznog FM signala bude konstantna. Ako to nije ispunjeno, dobijeni signal na izlazu diskriminatora mijenjaće se sa promjenama te amplitude. Da bi se eliminisala ta parazitna amplitudska modulacija, ispred diskriminatora se uvijek postavlja sklop čiji je zadatak da štetne varijacije amplitude FM signala učini što manjim. Takav sklop naziva se ***limiter*** ili ***ograničavač*** amplituda.

Limiter je nelinearan sklop čija je karakteristika na slici:

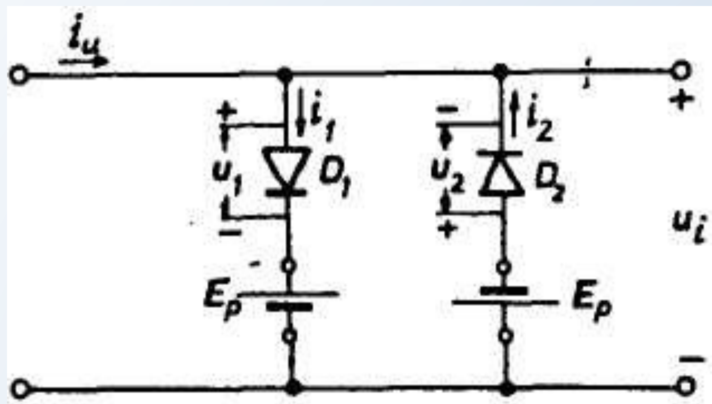



*Slika: Idealna karakteristika limitera*

Kompletna blok šema sklopa za detekciju će biti:




Sa L je označen limiter koji se može realizovati kao paralelna veza dvije obrnute poluprovodničke diode:



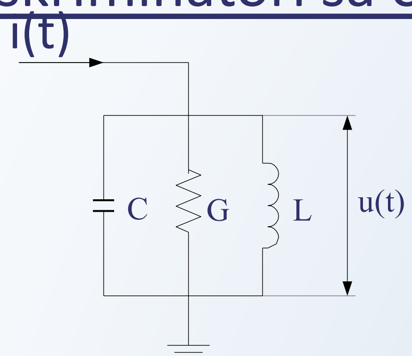

*Slika: Šema limitera*

U opštem slučaju, diskriminatore možemo podijeliti u dvije grupe:

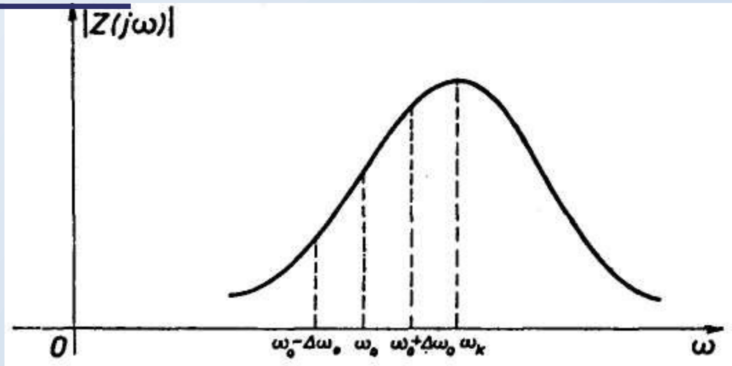
1.Tradicionalni diskriminatori- konverzija FM u KAM signal (diferenciranje) se ostvaruje pomoću oscilatornih kola
2.Moderni diskriminatori- konverzija FM u KAM signal (diferenciranje) se ostvaruje pomoću kola realizovanih u integrisanoj tehnologiji.

## 1. Tradicionalni diskriminatori

<u>- FM diskriminatori sa oscilatornim kolom</u>




*Slika: Oscilatorno kolo koje služi za konverziju FM signala u AM signale*




*Slika: Zavisnost modula impedanse oscilatornog kola od učestanosti*

Amplitudsko-frekvencijska kakakteristika sklopa sa slike je na jednom svom dijelu linearna. Parametre kola treba podesiti tako da je ona linearna u okolini učestanosti nosioca $\omega=\omega_0$, i da oblast linearnosti bude dovoljno velika kako bi se sve vrijednosti učestanosti nalazile unutar nje.

$$|Z(j\omega)| = \frac{|U(j\omega)|}{|I(j\omega)|} = \frac{\frac{1}{G}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)^2}}$$

$$\delta\omega = \omega - \omega_0$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \pm \delta$$

Da bi se ispunio uslov linearnosti, mora da je:

$$\delta\omega << \omega_0$$

$$\delta << \omega_0$$

Odnosno, rezonantna učestanost i učestanost nosioca su bliske. Tada je:

$$|Z(j\omega)| \approx \frac{\frac{1}{G}}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{C}{G}\right)^2 (\delta - \delta\omega)^2}}$$

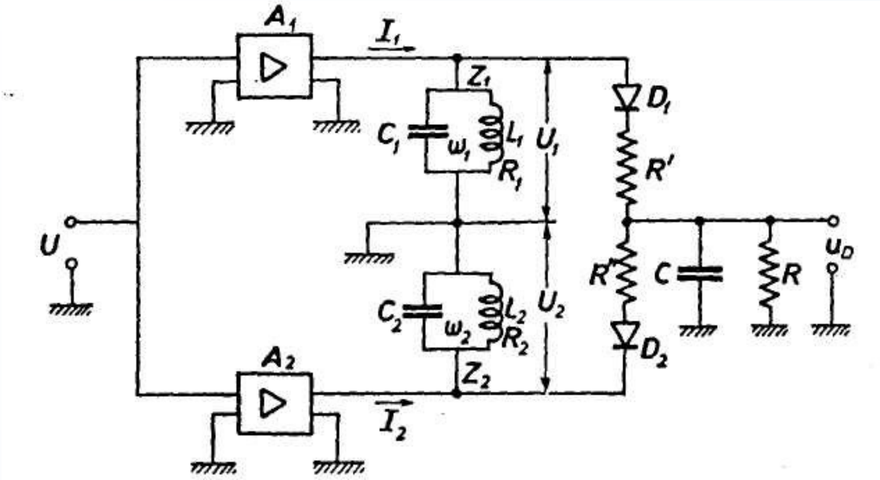
Pretpostavimo da je $\delta >> \delta\omega$ , što je neophodno za rad na linearnom dijelu karakteristike. Označimo sa α=G/2C, δ<<α, tada je:

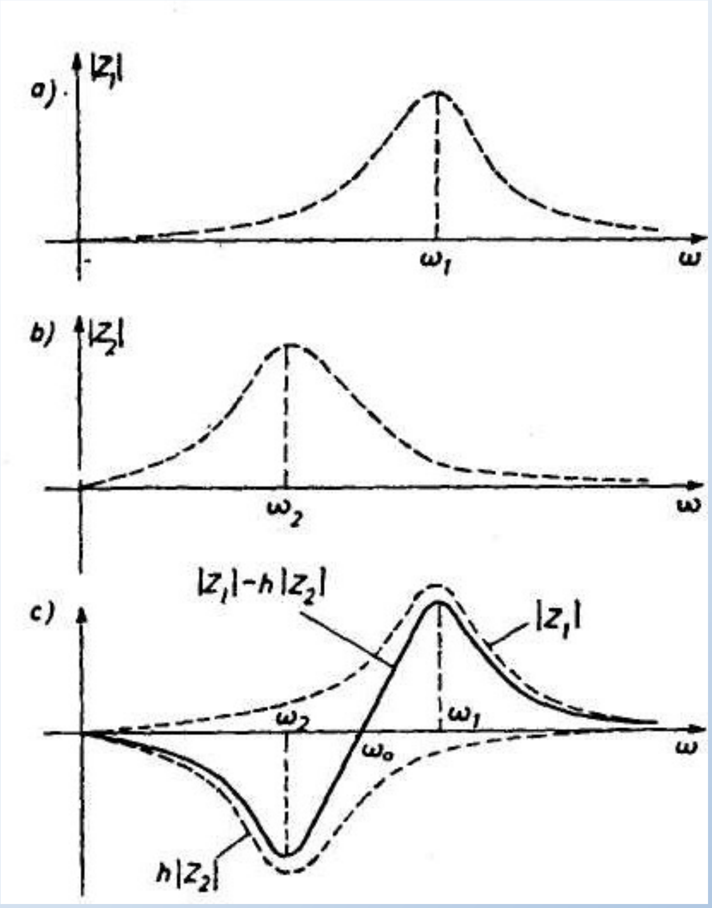
$$|Z(j\omega)| \approx \frac{1}{G}\left[\left(1-\frac{\delta^2}{2\alpha^2}\right)\right]+\frac{\delta}{\alpha^2}\delta\omega$$

$$|U(j\omega)| = |Z(j\omega)||I(j\omega)| \approx \frac{1}{G}|I(j\omega)|\left[\left(1-\frac{\delta^2}{2\alpha^2}\right)+\frac{\delta}{\alpha^2}\ \delta\omega\right]$$

Na izlazu iz oscilatornog kola se dobija signal koji je direktno srazmjeran δω. Ako je amplituda ulaznog signala |I(jω)| konstantna, obezbijeđen je KAM signal koji se dalje propušta kroz detektor anvelope.

## - Balansni diskriminator sa dva oscilatorna kola




Dva oscilatorna kola su izbalansirana, podešena su tako da je rezonantna učestanost jednog $\omega_1=\omega_0+\delta$, a drugog $\omega_2=\omega_0-\delta$. Zbirna prenosna karakteristika je takva da je linearna oblast znatno veća nego u slučaju kada imamo samo jedno oscilatorno kolo.

$$|U_D(j\omega)| = |U(j\omega)||H(j\omega)| = |U(j\omega)|\left[|H(j\omega)|_{\omega_0+\delta} - |H(j\omega)|_{\omega_0-\delta}\right] =$$

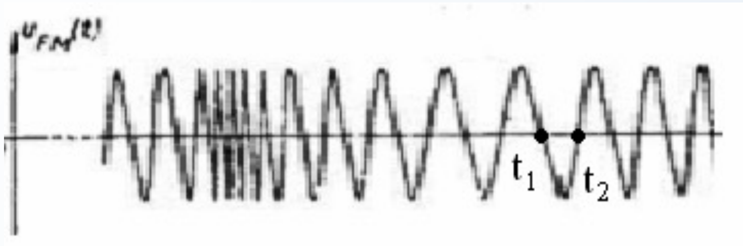
$$|U(j\omega)|\,|H(j\omega)| = |U(j\omega)|\frac{2\delta}{G\alpha^2}\,\delta\omega \sim u_m(t)$$

## 2. Moderni diskriminatori

- Detektor presjeka sa nulom

$$u_{FM}(t) = \; U_o \cos\!\big(\omega_0\, t + \; k_\omega \int u_m(t)dt \,\big)$$

$t_1$ i $t_2$ su trenuci presjeka FM signala sa nulom. U tim trenucima faze su:




$$\varphi(t_1) = \; \omega_0 t_1 + \; k_\omega \int_{t_0}^{t_1} u_m(t)\, dt$$

$$\varphi(t_2) = \; \omega_0 t_2 + \; k_\omega \int_{t_0}^{t_2} u_m(t)\, dt$$

$$\varphi(t_2) - \; \varphi(t_1) = \; \pi$$

$$\omega_0(t_2 - t_1) + \; k_\omega \int_{1}^{t_2} u_m(t)\, dt = \pi$$

Kako je uvijek $f_0 >> f_m$ , to se u naznačenom intervalu $u_m$(t) malo mijenja.

$$u_m(t) \approx const$$

$$\omega_0\,(t_2 - t_1) + k_\omega u_m(t_1)(t_2 - t_1) = \pi$$

$$\big(\omega_0 + \; k_\omega u_m(t_1\,)\big)(t_2 - t_1) = \omega_i(t_2 - t_1) = \pi$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{(t_2 - \; t_1)} \qquad\qquad f_i \approx \frac{1}{2(t_2 - t_1)}$$

Trenutna učestanost se može odrediti na osnovu poznavanja trenutaka kada funkcija ima vrijednost 0.
Interval u kome brojimo nule mora da bude dovoljno veliki da obuhvati dovoljan broj nula (n), ali i dovoljno mali kako bi se $u_m$(t) unutar njega sporo mijenjao:

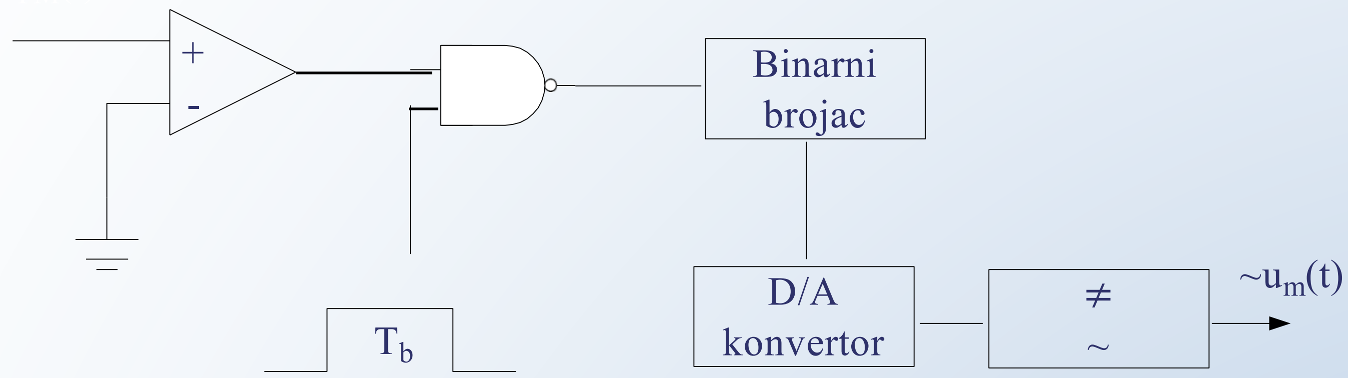
$$\frac{1}{f_0} < T_b \ll \frac{1}{f_m}$$

$$n \approx \frac{T_b}{t_2 - t_1} = \frac{T_b}{\frac{\pi}{\omega_i}} = \frac{T_b}{\pi}\omega_0 + \frac{T_b}{\pi}k_w u_m(t)$$

$$n = n_0 + K u_m(t)$$

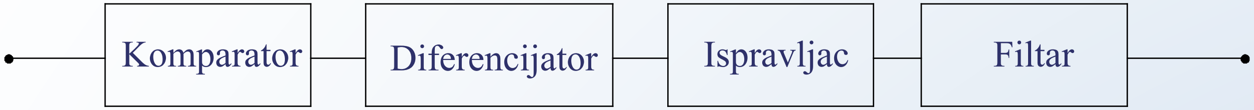
$$\delta n = n - n_0 = K u_m(t)$$

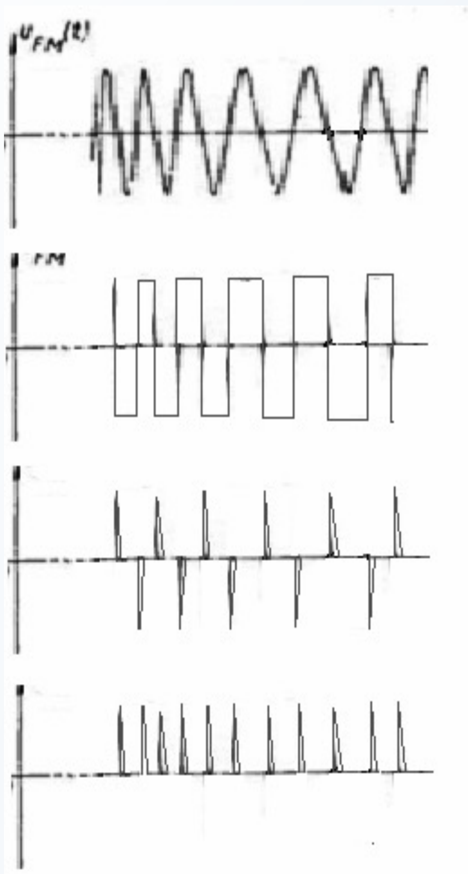
Jedan način realizacije je na slici:




Komparator na izlazu daje pravougaonu povorku koja mijenja polaritet svaki put kad signal prođe kroz nulu. Logička kapija se otvara u intervalu brojanja, pa binarni brojač daje broj presjeka sa nulom. U D/A konvertoru se vrši konverzija cifre u odgovarajuću analognu veličinu.

# Drugi način je:



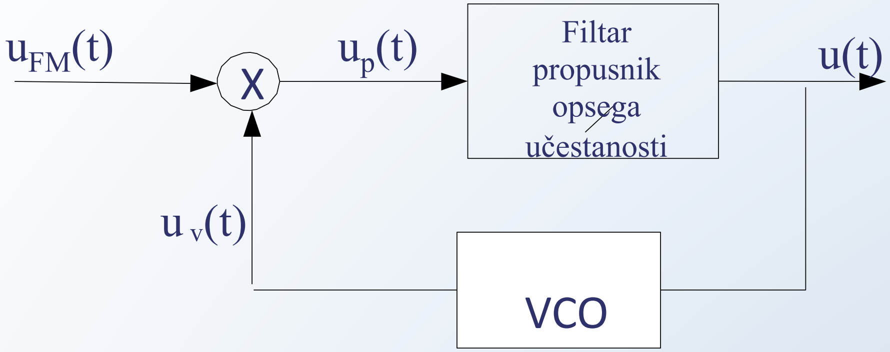
FM signal

Signal na izlazu iz komparatora

Signal na izlazu iz diferencijatora

Signal na izlazu ispravljača

- PLL (Phase Locked Loop) detektor




Ovo je sistem sa pozitivnom povratnom spregom, sa naponski kontrolisanim oscilatorom (VCO) u povratnoj grani. $u_p$(t) je signal proporcionalan faznoj razlici FM signala na ulazu i signala na izlazu iz VCO.

Kada se trenutna faza $u_{FM}$(t) i $u_v$(t) izjednače, tada su ova dva signala ista:

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_1(t))$$

$$\varphi_1(t) = k_\omega \int u_m(t)dt$$

$$u_v(t) = U_v \sin(\omega_0 t + \varphi_2(t))$$

$$u_p(t) = K u_{FM}(t) u_v(t)$$

$$u_p(t) = \frac{1}{2} K U_0 U_v [\sin(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + \sin(2\omega_o t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t))]$$

Prolaskom kroz NF filtar dobija se:

$$u(t) = \frac{1}{2} K U_0 U_v \sin(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))$$

Kada su faze približno jednake:

$$\varphi_2(t) \approx \varphi_1(t)$$

$$u(t) = \frac{1}{2} K U_0 U_v (\varphi_2(t) - \varphi_1(t))$$

Ovaj signal dolazi na ulaz VCO.

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = k_\omega u_m(t)$$

$$\varphi_2(t) = k_0 \int u(t) dt \qquad \frac{d\varphi_2(t)}{dt} = k_0 u(t)$$

$$u(t) = \frac{1}{2} K U_0 U_v \left[ k_0 \int u(t) dt - \varphi_1(t) \right] \Big/ \frac{d(.)}{dt}$$

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = k_0 \left[ -\frac{2 \frac{du(t)}{dt}}{k_0 K U_0 U_v} + u(t) \right]$$

Ako pretpostavimo da je učestanost signala $u$(t) znatno manja od $k_0 K$:

$$\frac{\frac{du(t)}{dt}}{k_0 K} << 1 \Rightarrow \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \approx k_0 u(t)$$

S obzirom na relaciju:

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = k_\omega u_m(t)$$

$$\Rightarrow u(t) \cong \frac{k_\omega}{k_0} u_m(t)$$

Izlazni signal je srazmjeran modulišućem signalu.

# SLUČAJNI ŠUM U TELEKOMUNIKACIONIM SISTEMIMA

- Šum je neizbježna slučajna pojava koja utiče na prenošeni signal, superponira se signalu poruke, te na taj način mijenja njegove vrijednosti i oblik.

- Šum je slučajna elektromagnetna pojava koja se javlja u svim sistemima i manifestuje se na različite načine. Npr. neželjeni i nepravilni zvučni efekti u slušalici; slučajna svjetlucanja na televizijskom ekranu; greške nastale pri prenosu podataka prouzrokovane su šumom;

- Šum kao pojava u prenosu signala ima veliki značaj, jer maskiranje signala šumom i greške koje on izaziva su stalno prisutni faktori koji degradiraju kvalitet veza i ograničavaju njihov domet.

Veliki je broj uzroka zbog kojih dolazi do pojave šuma, pa je saglasno tome napravljena i klasifikacija šumova različitog porijekla:

- šum ambijenta - šum koji postoji u prostoriji korespondenta i koji se transformacijom preko mikrofona prenosi u sistem
- šum mikrofona - potiče od neregularnih struja koje protiču kroz mikrofon i kad nema signala
- termički šum - vodi porijeklo od nepravilnog kretanja elektrona u provodnicima usled toplotnih efekata; javlja se u ***svim*** komunikacionim sistemima
- šum izazvan nelinearnim izobličenjima složenih signala
- šum nastao zbog linearnog preslušavanja iz niza kanala u jedan posmatrani kanal
- atmosferski šum - izazvan prirodnim pražnjenjima u atmosferi
- čovjekom izazvan šum - nastaje zbog varničenja i pražnjenja u električnim uređajima i postrojenjima itd.

# PRIRODA TERMIČKOG ŠUMA I NJEGOVE MANIFESTACIJE

Termički šum predstavlja pojavu koja je svojstvena svim sistemima čija je apsolutna temperatura T veća od 0°K.

Po svojoj prirodi, termički šum predstavlja ogroman skup pojedinačnih slučajnih događaja, ali u njemu mogu da se pronađu izvjesne statističke regularnosti koje su od velikog značaja u proučavanju problema prenosa signala.

Jedan od parametara koji, u statističkom smislu, može dovoljno dobro opisati ovaj šum je njegova srednja snaga, tj. spektralna gustina srednje snage šuma.

# SPEKTRALNA GUSTINA SREDNJE SNAGE TERMIČKOG ŠUMA

Spektralna gustina srednje snage termičkog šuma (bijelog aditivnog Gauss-ovog) je data izrazom:

$$p_N(f) = p_N = kT = const.$$

k - Bolcmanova konstanta k=1,38 $10^{-23}$ J/K
T – apsolutna temperatura (u K)

Srednja snaga termičkog šuma u nekom opsegu učestanosti može se jednostavno odrediti:

$$\overline{P_N} = \int_{f_N}^{f_V} p_N(f)df = kT(f_V - f_N) = kTB$$

Srednja snaga termičkog šuma na konstantnoj temperaturi T zavisi samo od širine opsega B, a ne od učestanosti na kojoj se on nalazi.

Pošto je spektralna gustina konstantna, za ovakav termički šum se kaže da je ravnomjerno raspodijeljen u spektru i često se naziva ***ravnim*** ili ***bijelim*** šumom, jer i bijelu svjetlost karakteriše uniformna raspodjela u vidljivom dijelu spektra.

# RASPODJELA AMPLITUDA TERMIČKOG ŠUMA

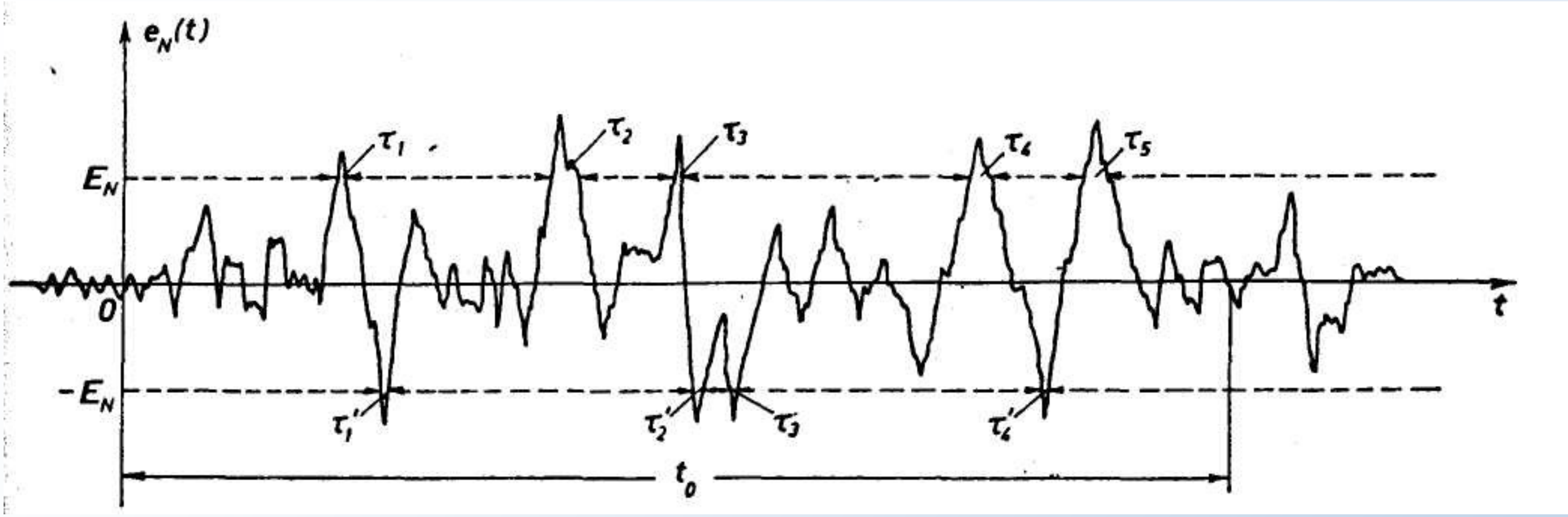
Pomoću spektralne gustine srednje snage termičkog šuma lako može da se izračuna srednja snaga šuma u nekom određenom opsegu učestanosti. Na taj način spektralna gustina, odnosno srednja snaga, karakteriše šum kao slučajnu pojavu, ***u prosjeku,*** u jednom dugom intervalu vremena.

Takav podatak je od značaja, ali ne kazuje ništa o trenutnim vrijednostima slučajne vremenske funkcije koja opisuje šum (postoji veliki broj različitih vremenskih talasnih oblika koji imaju istu srednju snagu).

Potrebno je opisati funkciju šuma i u vremenskom domenu. To je moguće samo na osnovu ***statističkog pristupa*** problemu pomoću kojeg se može procijeniti kakva je raspodjela trenutnih vrijednosti šuma u jednom dugom vremenskom intervalu.

U suštini, ne može se ništa reći o trenutnoj vrijednosti šuma u nekom trenutku (to je osnovna osobina slučajnih funkcija), ali se može reći da je vjerovatnoća da će u nekom dijelu jednog dugog vremenskog intervala amplituda šuma biti veća od neke unaprijed specificirane vrijednosti.

Pretpostavimo da funkcija $e_N(t)$ sa slike predstavlja vremensku funkciju koja opisuje neki slučajan proces. Neka je $t_0$ interval u kome se analizira funkcija relativno dug.




*Slika: Vremenska funkcija slučajnog procesa*

Označimo sa $e_N$ bilo koju od trenutnu vrijednost funkcije $e_N(t)$. Tada $e_N$ predstavlja slučajnu promjenljivu u skupu koji obrazuju trenutne vrijednosti ove funkcije iz intervala $t_0$.

Dio posmatranog vremena $t_0$ u kome je trenutna vrijednost $e_N > E_N$, $E_N$ je neka unaprijed specificirana vrijednost, je:

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$$

Vjerovatnoća da trenutna vrijednost šuma bude veća ili jednaka nekoj unaprijed specificiranoj vrijednosti je:

$$P(e_N \geq E_N) = \frac{\tau}{t_0}$$

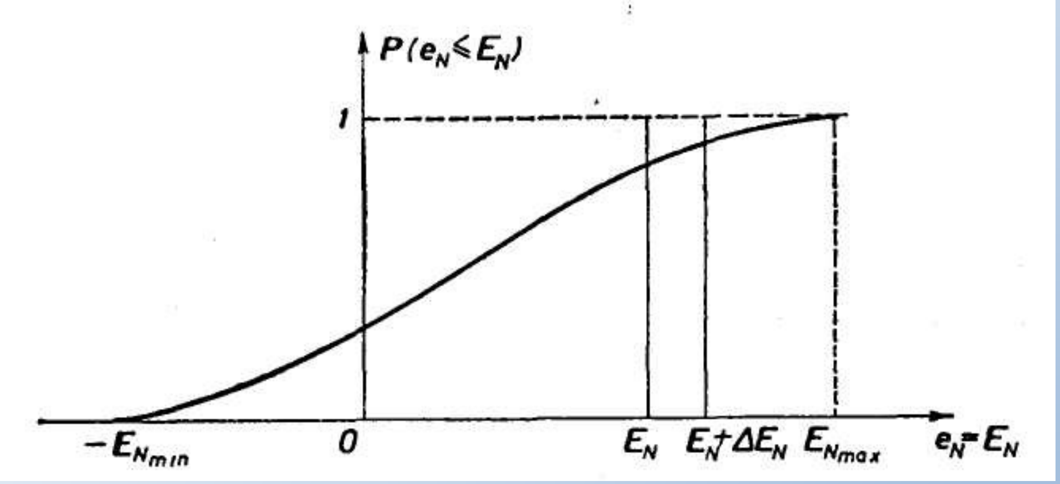
Odnosno, vjerovatnoća da amplituda šuma bude manja od neke unaprijed specificirane vrijednosti je:

$$P(e_N < E_N) = 1 - \frac{\tau}{t_0} = \frac{t_0 - \tau}{t_0}$$

Specificirajući čitav niz vrijednosti $E_N$, $E_N=E_{Nl}$, $E_{N2}$ ..., moguće je pronaći njima odgovarajuće vrijednosti $P(e_N \leq E_{N1})$, $P(e_N \leq E_{N2})$ itd.

Dijagram koji predstavlja zavisnost $P(e_N \leq E_N)$ od neke specificirane vrijednosti $e_N=E_N$, je kriva na slici.

$E_{Nmax}$- maksimalna vrijednost $e_N$ u intervalu $t_0$,
$-E_{Nmin}$- minimalna vrijednost $e_N$ u intervalu $t_0$

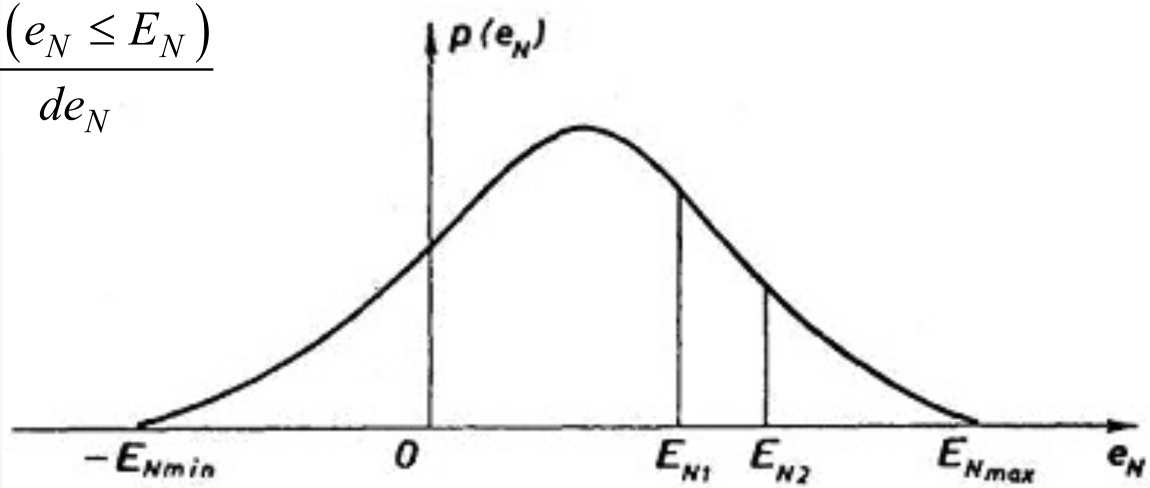



*Slika: Funkcija raspodjele vjerovatnoće*

Dobijena kriva koja predstavlja relativan iznos vremena u kome je $e_N \leq E_N$ naziva se ***kriva raspodjele funkcije*** $e_N(t)$, a veličina $P(e_N \leq E_N)$ ***funkcija raspodjele***.

Strmina krive raspodjele amplituda se zove ***funkcija gustine vjerovatnoće amplituda*** $e_N(t)$:

$$p(e_N) = \frac{dP(e_N \leq E_N)}{de_N}$$




*Slika: Funkcija gustine vjerovatnoće*

Vjerovatnoća da se trenutna vrijednost šuma $e_N$ nalazi između vrijednosti $E_{N1}$ i $E_{N2}$ je:

$$P(E_{N1} \leq e_N \leq E_{N2}) = \int_{E_{N1}}^{E_{N2}} p(e_N)\,de_N$$

Važi:

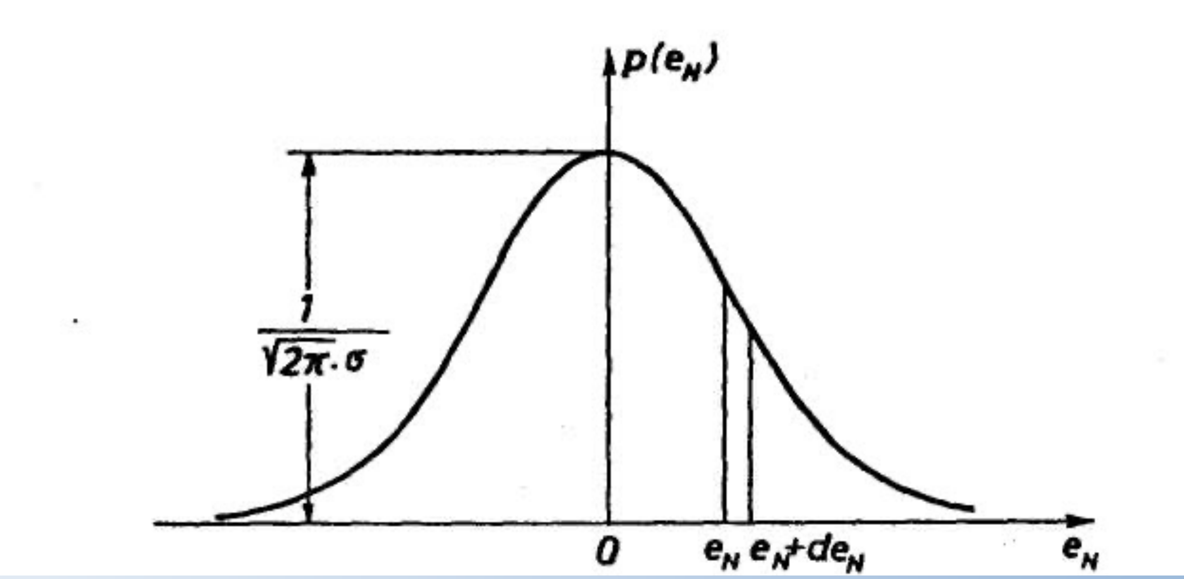
$$P(-E_{N\min} \leq e_N \leq E_{N\max}) = \int_{-E_{N\min}}^{E_{N\max}} p(e_N)\,de_N = 1$$

Srednja vrijednost napona termičkog šuma $e_N$(t) je:

$$\overline{e_N(t)} = \overline{e_N} = \lim_{t_0 \to \infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} e_N(t)dt = 0$$

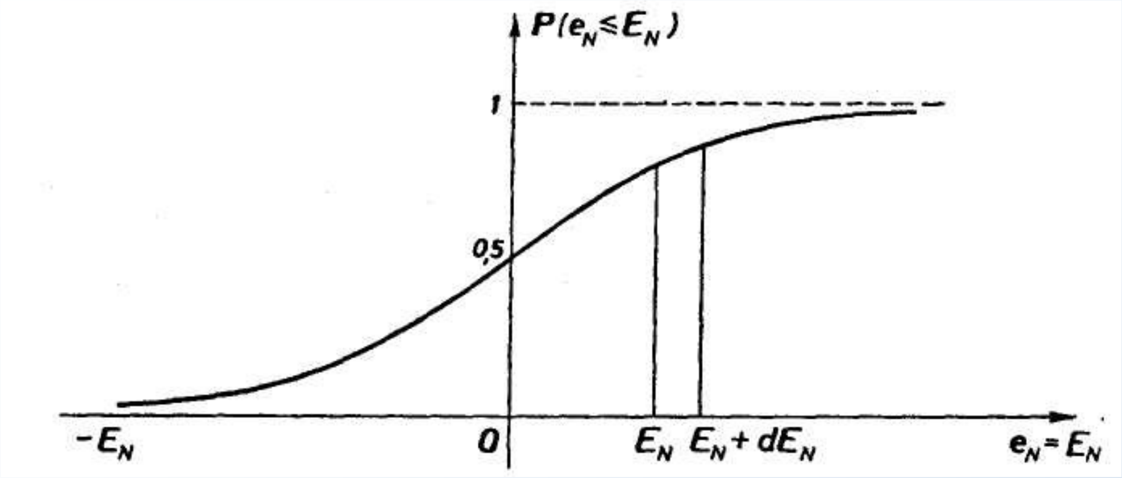
Ovakav zaključak je donijet intuitivno. Ako bi srednja vrijednost napona termičkog šuma bila različita od nule, tada bi voltmetar vezan za bilo koji uređaj u izolovanom sistemu pokazivao neku vrijednost različitu od nule, što nije moguće.
Razni eksperimenti su pokazali da funkcija raspodjele amplituda termičkog šuma slijedi **Gauss-ov** ili **normalni zakon raspodjele amplituda**.
Funkcija gustine vjerovatnoće je data izrazom:

$$p(e_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{e_N^2}{2\sigma^2}}$$




*Slika: Gauss-ova funkcija gustine vjerovatnoće*

Odgovarajuća funkcija raspodjele je:




*Slika: Gauss-ova funkcija raspodjele vjerovatnoće*

U izrazu za $p(e_N)$ je:

σ =const. – standardna devijacija

$\sigma^2 = \overline{\left(e_N - \overline{e_N}\right)^2}$ - srednje kvadratno odstupanje slučajno promjenjive $e_N$ od svoje srednje vrijednosti; varijansa:

$$\sigma^2 = \overline{\left(e_N - \overline{e_N}\right)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e_N - \overline{e_N}\right)^2 p(e_N)\, de_N =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e_N{}^2 p(e_N)\, de_N - 2\overline{e_N} \int_{-\infty}^{\infty} e_N p(e_N)\, de_N + \overline{e_N}^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(e_N)\, de_N$$

- prvi integral predstavlja po definiciji srednju kvadratnu vrijednost slučajne promenljive;
- drugi integral jednak je srednjoj vrijednosti slučajne promjenljive;
- treći integral je jednak 1

$$\sigma^2 = \overline{\left(e_N - \overline{e_N}\right)^2} = \overline{e_N^2} - 2\overline{e_N}\,\overline{e_N} + \overline{e_N}^2 = \overline{e_N^2} - \overline{e_N}^2$$

$$\overline{e_N} = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \overline{e_N^2} = E_{Neff}^2$$

• ***Centralna granična teorema***

Raspodjela vjerovatnoće sume velikog broja nezavisnih slučajnih veličina, od kojih svaka može imati bilo kakvu sopstvenu raspodjelu, teži Gauss-ovoj raspodjeli.

$$P\left(\left|e_N\right| \le E_N\right) = P\left(-E_N \le e_N \le E_N\right) = \int_{-E_N}^{E_N} p\left(e_N\right) de_N = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{E_N} e^{-\frac{e_N^2}{2\sigma^2}} de_N$$

Integral tipa:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt = erfx$$

erfx je ***funkcija greške***. Konačno je:

$$P\left(\left|e_N\right| \le E_N\right) = P\left(-E_N \le e_N \le E_N\right) = erf\,\frac{E_N}{\sqrt{2}\sigma}$$

Tražena vjerovatnoća (procenat vremena u kome je $|e_N| \geq E_N$) je:

$$P\left(\left|e_N\right| \ge E_N\right) = 1 - P\left(\left|e_N\right| \le E_N\right) = 1 - erf\,\frac{E_N}{\sqrt{2}\sigma} = 1 - erf\,\frac{E_N}{\sqrt{2}E_{Neff}} = erfc\,\frac{E_N}{\sqrt{2}E_{Neff}}$$

Procenat vremena u kome je amplituda napona termičkog šuma veća od efektivne vrijednosti napona šuma je:

$$P\left(\left|e_N\right| \ge E_{Neff}\right) = 1 - erf\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 0,68 = 0,32$$